Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$

Применим признак Деламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}\right)}{\left(\frac{n^n}{e^n n!}\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{e(n+1)n!n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{en^n} =$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\cdot e = 1$$

Предел получился равным единице и признак Деламбера не принёс никакой информации о сходимости ряда. В подобной ситуации можно попытаться применить формулу Стирлинга, согласно которой

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

По признаку сравнения положительных рядов в предельной форме можно заменить исследование данного ряда на исследование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Поскольку предел отношения их общих членов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n^n}{e^n n!}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Конечное число (не бесконечность), не равное нулю.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Хорошо исследовать по интегральному признаку Коши

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right)=+\infty$$

Такой интеграл расходится, поэтому расходится и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, а по признаку сравнения положительных рядов в предельной форме сходится и первоначальный ряд.